

Уравновешенное троичное быстрое преобразование Фурье

Афанасенков Ю.М

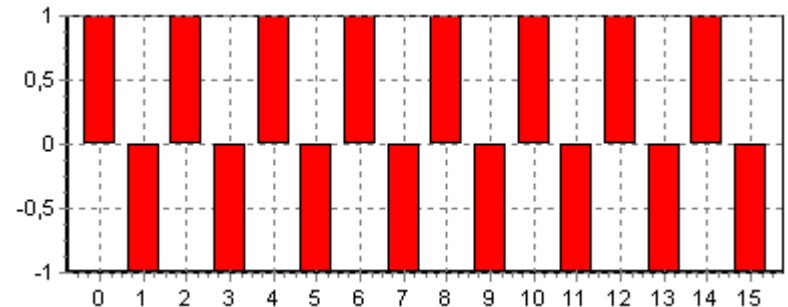
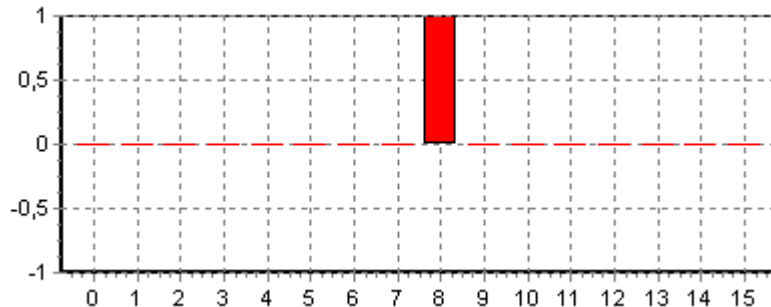
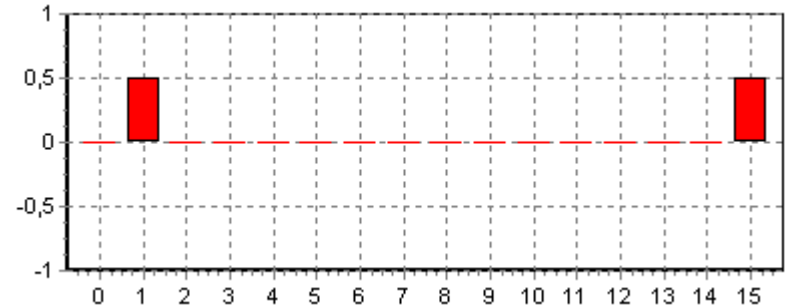
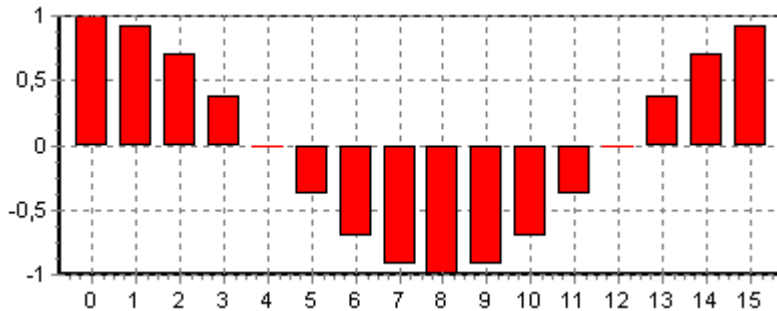
АО «НПК СПП»

nabbla1.livejournal.com

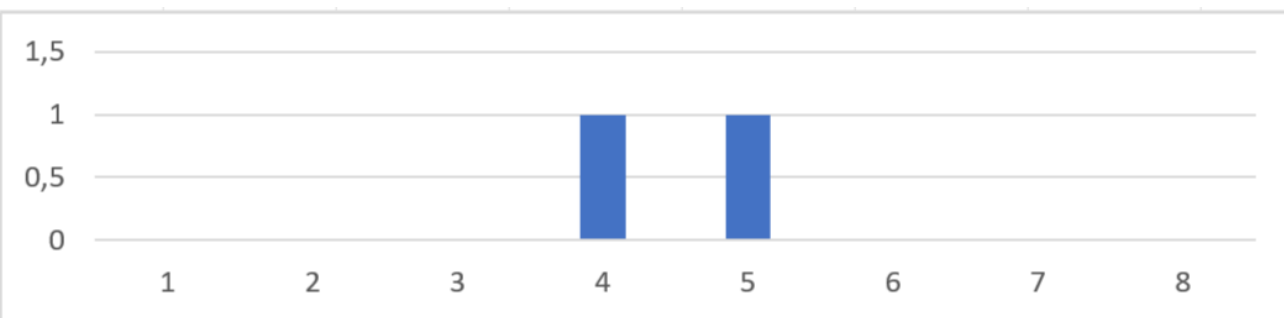
Стандартная запись ДПФ

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-2\pi i \frac{nk}{N}),$$

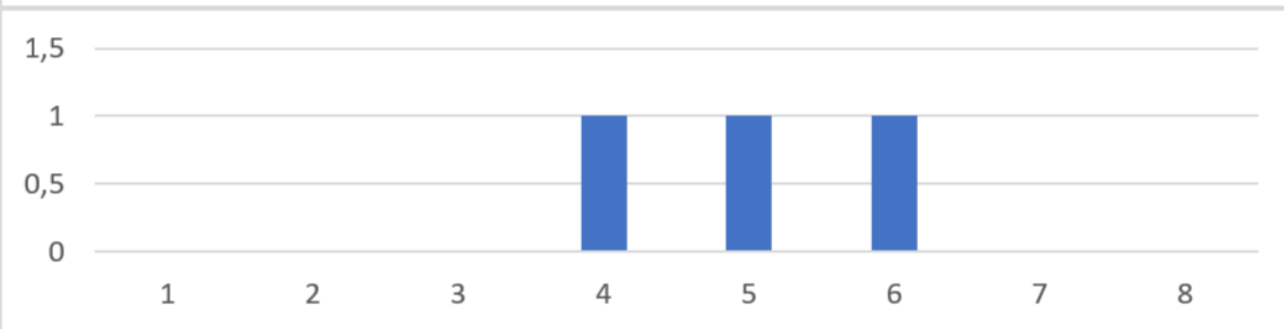
N, как правило, четное, для БПФ по базису 2 удобны $N=2^q$



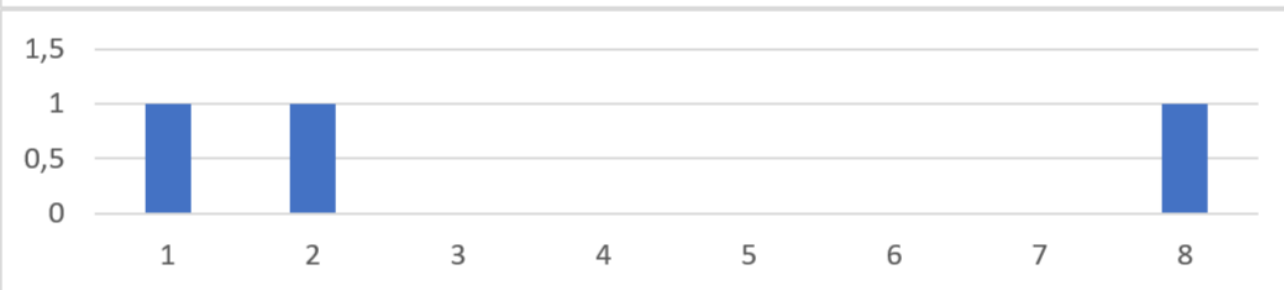
Странные понятия о симметрии



«Криво!»

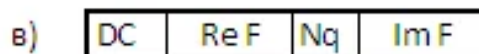
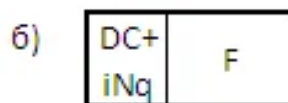
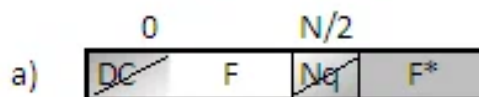
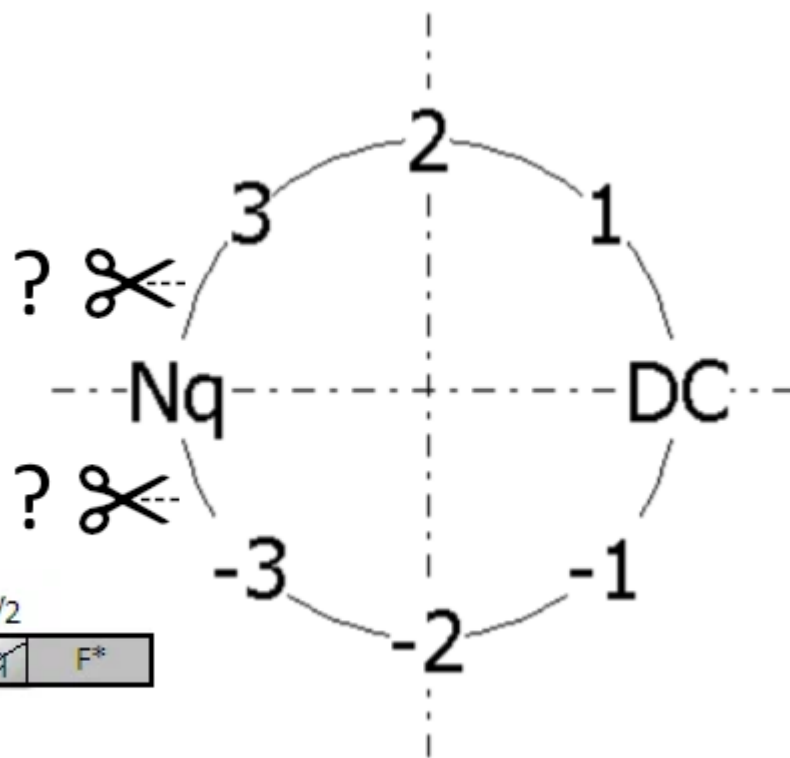
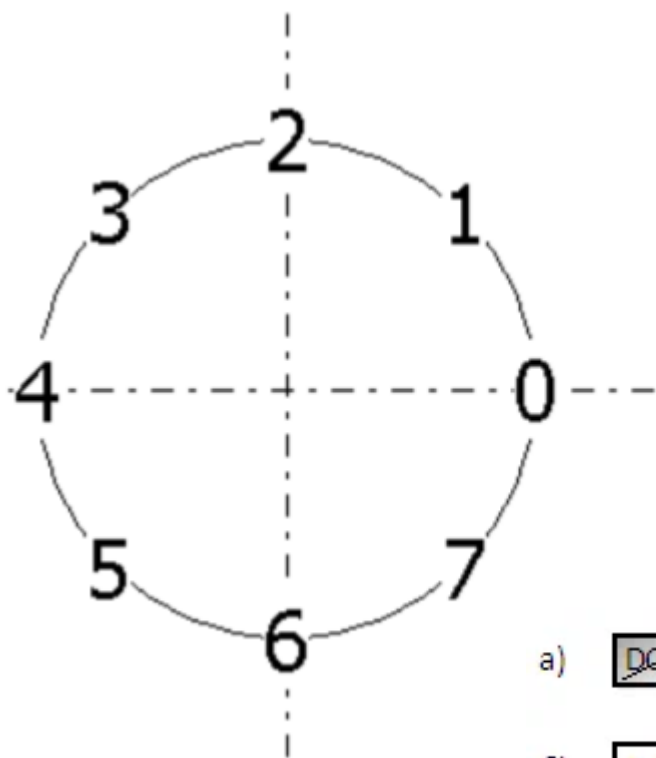


«Получше»



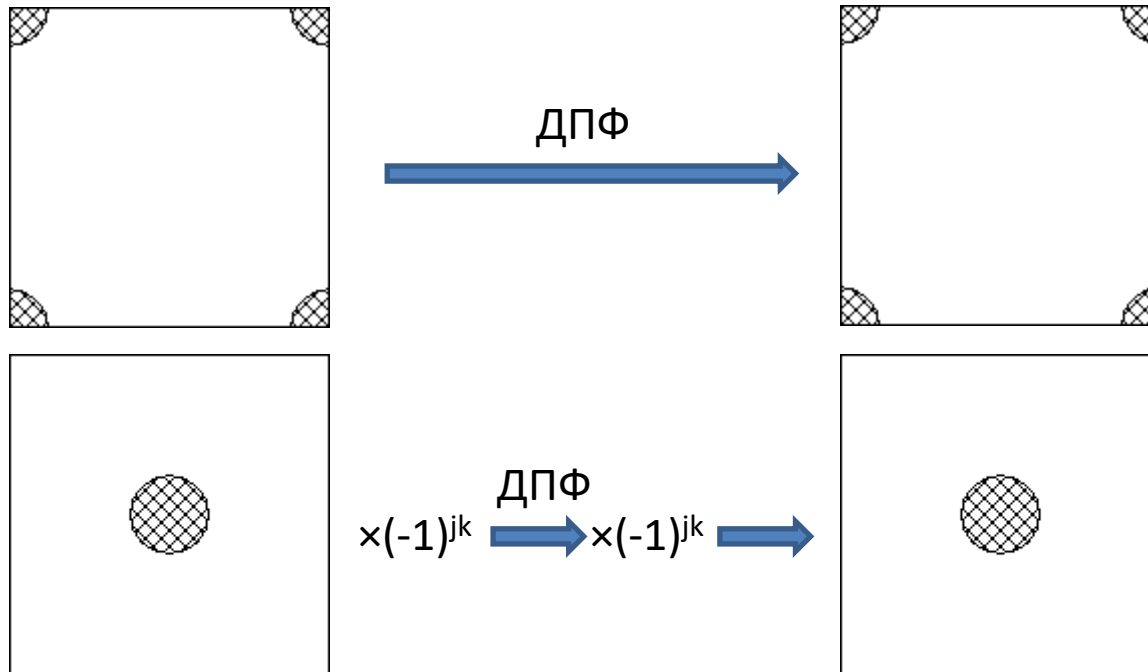
«Идеально!»

Симметрии есть, но на окружности

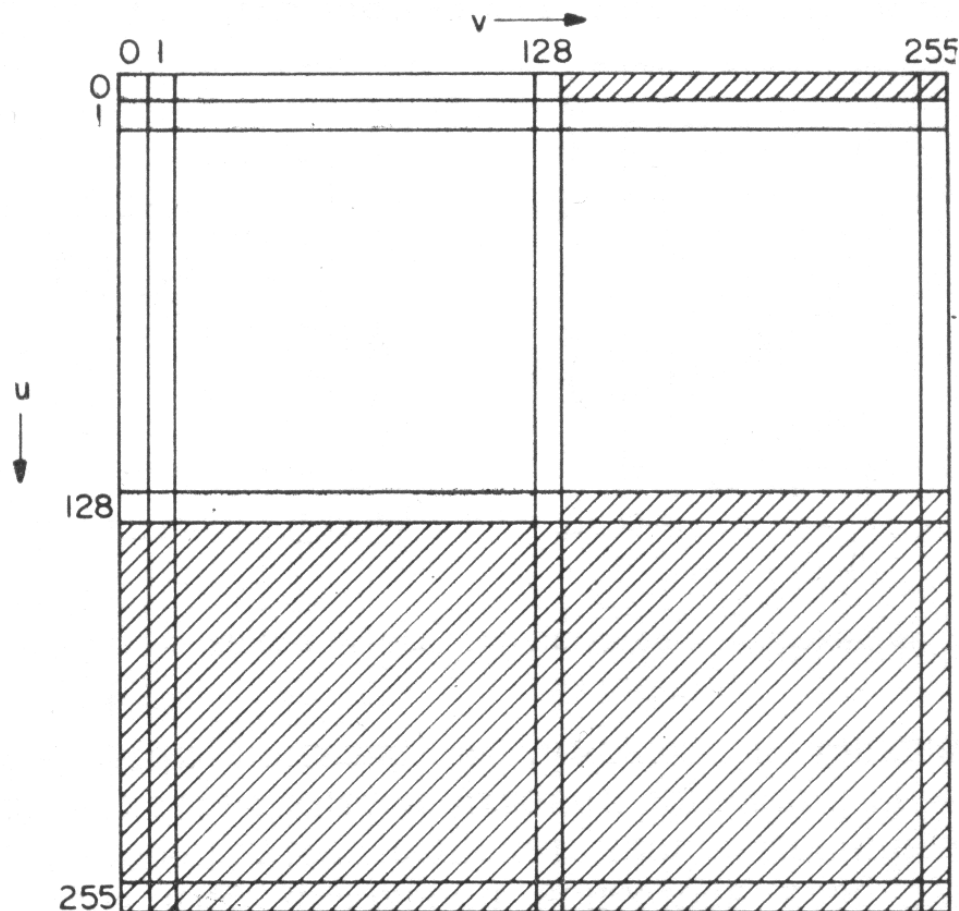


Двумерное ДПФ

$$X(u, v) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(j, k) \exp\left[-\frac{2\pi i}{N} (uj + vk)\right]$$

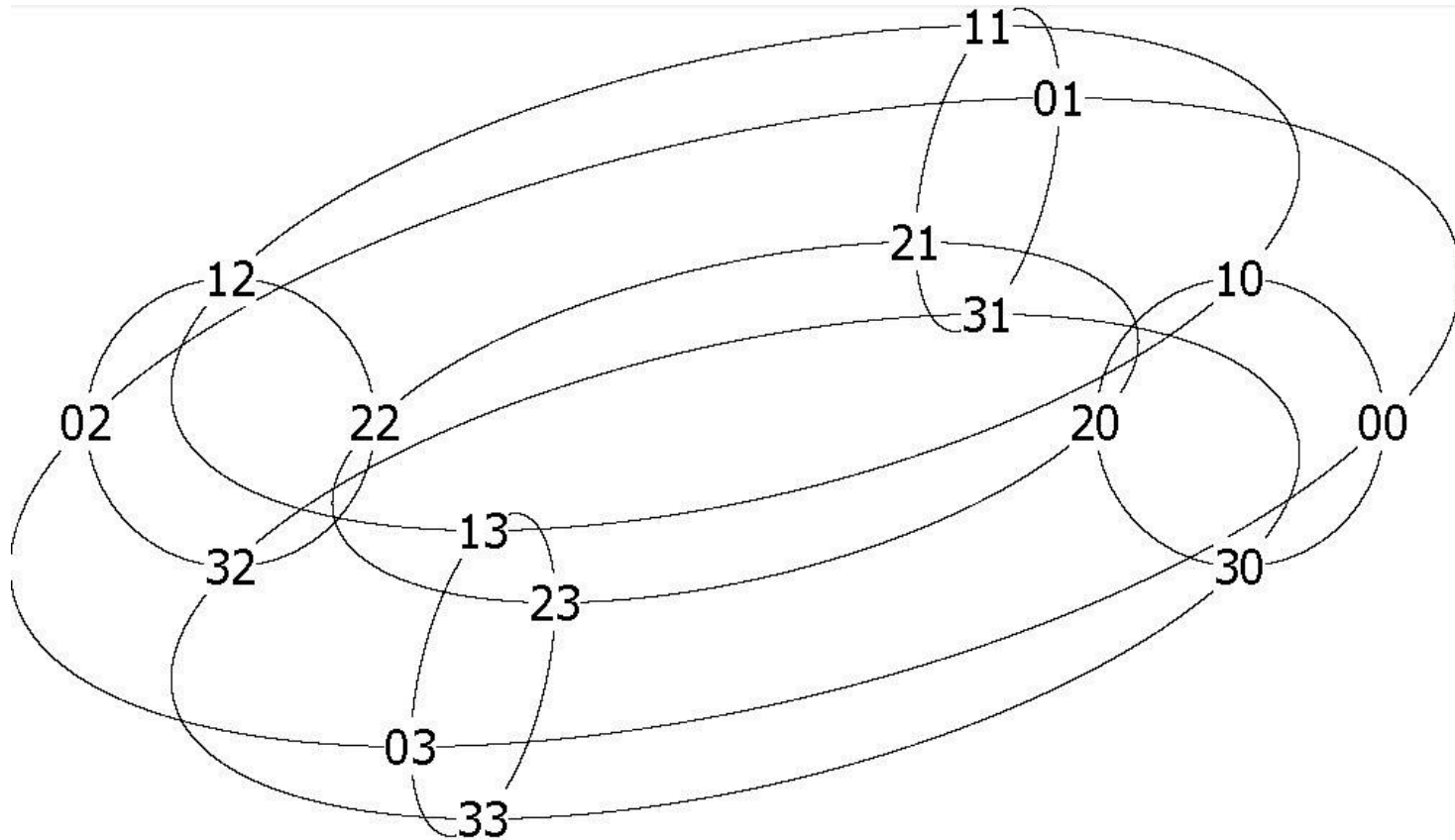


ДПФ от действительного сигнала



Серым отмечены избыточные области,
если исходное изображение действительно
(нет мнимой части)

Симметрия есть, но на торе



Уравновешенное троичное ДПФ

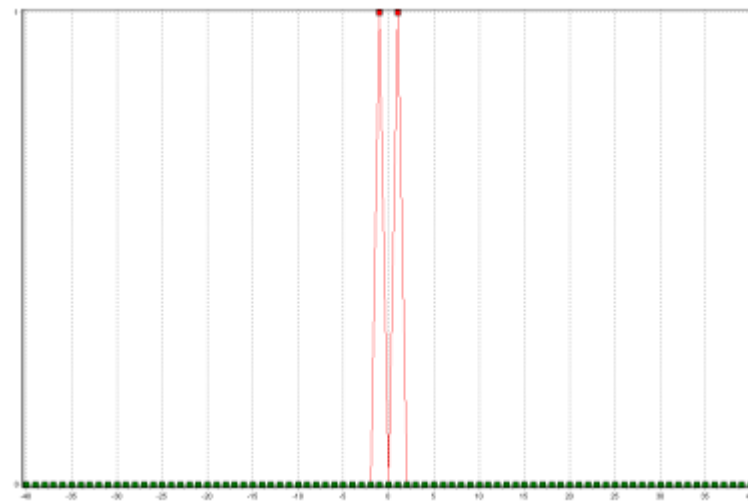
$$X(n) = \sum_{k=-T}^T x(k) \exp(-\frac{2\pi i}{N} nk),$$

$$N = 3^q,$$

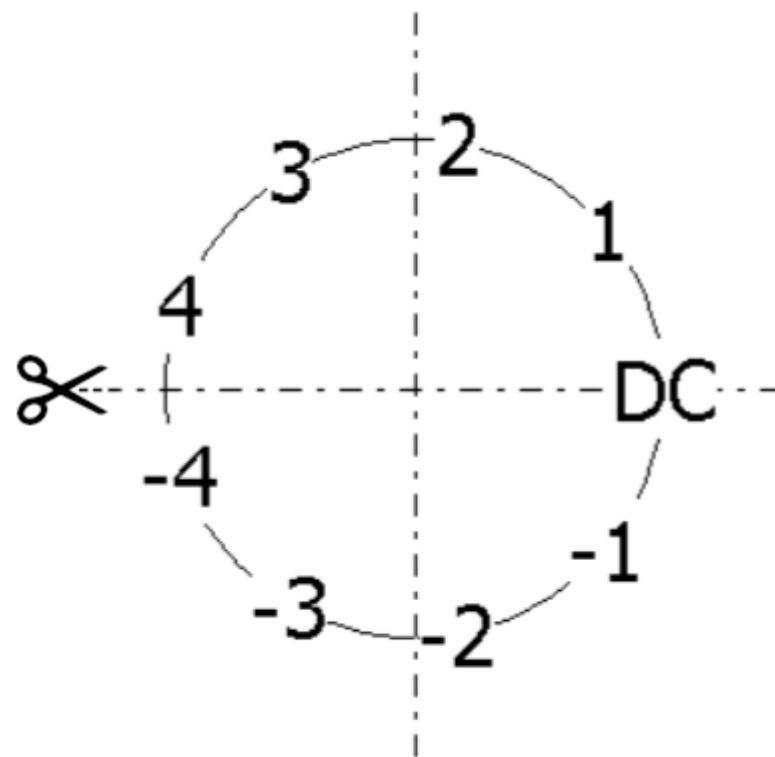
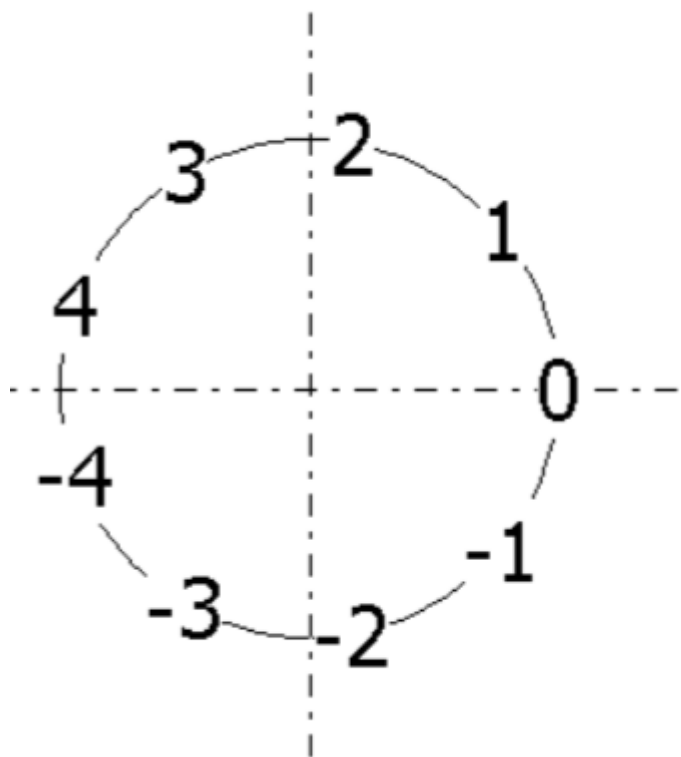
$$T = \frac{N-1}{2}$$

$$-T \leq n \leq T$$

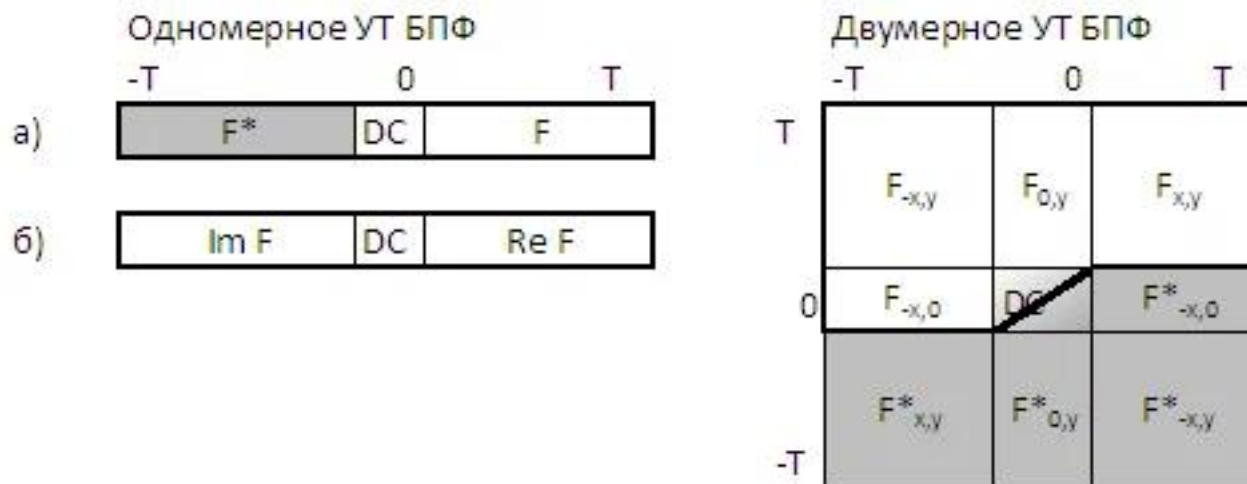
Исходный сигнал и его
ДПФ расположены
симметрично отн. нуля,
Количество элементов
справа и слева от нуля
одинаково.



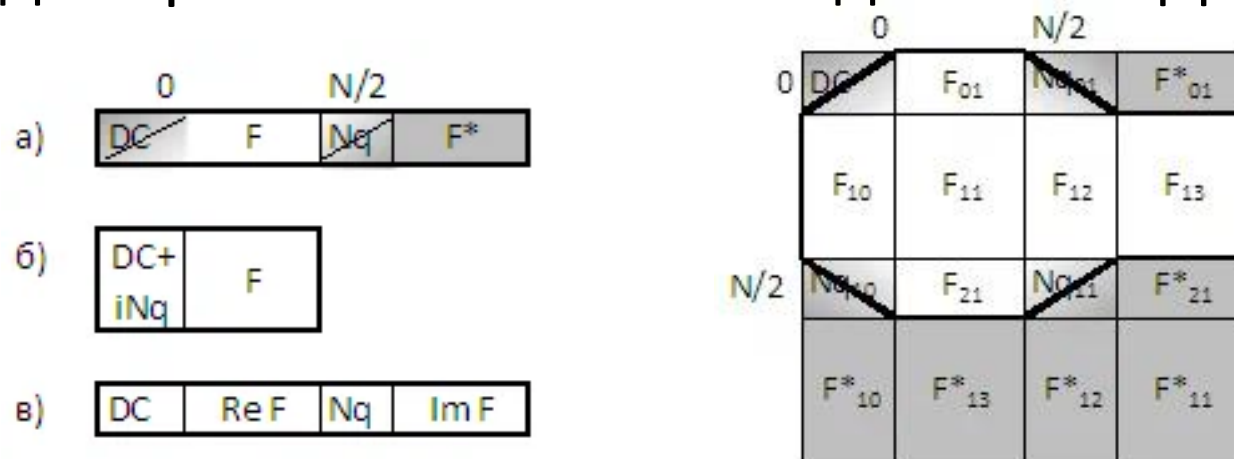
Окружность легко «режется»



УТ ДПФ от действительного сигнала



для сравнения – обычное двоичное ДПФ:



Алгоритм быстрого ур. тр преобразования Фурье

Прореживание по времени:

$$f_0(k) = x(3k),$$

$$f_1(k) = x(3k + 1),$$

$$f_{-1}(k) = x(3k - 1)$$

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=-T}^T x(k) W_N^{nk} = \sum_{k=-T}^T \left(x(3k) W_N^{n(3k)} + x(3k+1) W_N^{n(3k+1)} + x(3k-1) W_N^{n(3k-1)} \right) = \\ &= \sum_{k=-t}^t f_0(k) W_{(N/3)}^{nk} + W_N^n \sum_{k=-t}^t f_1(k) W_{(N/3)}^{nk} + W_N^{-n} \sum_{k=-t}^t f_{-1}(k) W_{(N/3)}^{nk}, \end{aligned}$$

$$X(n) = F_0(n) + F_1(n) W_N^n + F_{-1}(n) W_N^{-n}, \quad -t \leq n \leq t,$$

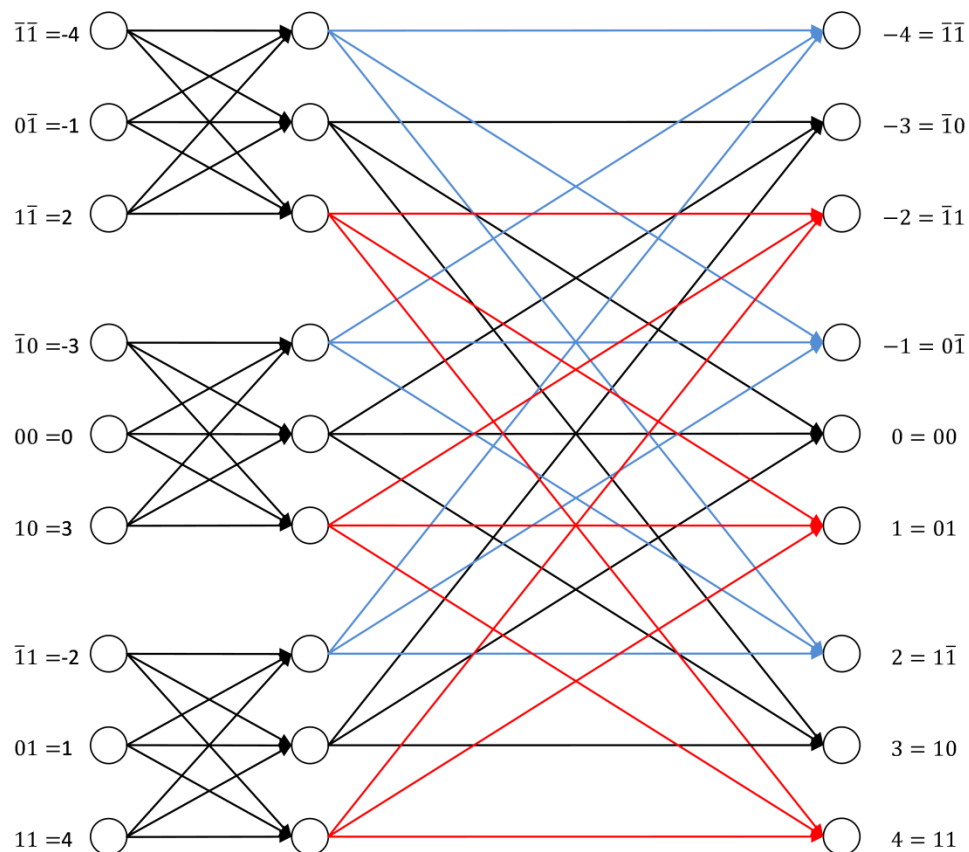
$$X(n + N/3) = F_0(n) + F_1(n) W_N^n W_3^1 + F_{-1}(n) W_N^{-n} W_3^{-1}, \quad t = \frac{N/3 - 1}{2}$$

$$X(n - N/3) = F_0(n) + F_1(n) W_N^{-n} W_3^{-1} + F_{-1}(n) W_N^n W_3^1$$

Одно преобразование для N отсчетов сведено к 3 преобр. по N/3 отсчета ценой kN операций. Всего итераций: $\log_3 N$. Общее время выполнения $kN \log_3 N$

Граф «Бабочка»

Троичная
инверсия
(триты
записали в
обратном
порядке)



Базис Эйзенштейна

$$z = a + bw,$$

$$w = \exp(2\pi i / 3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

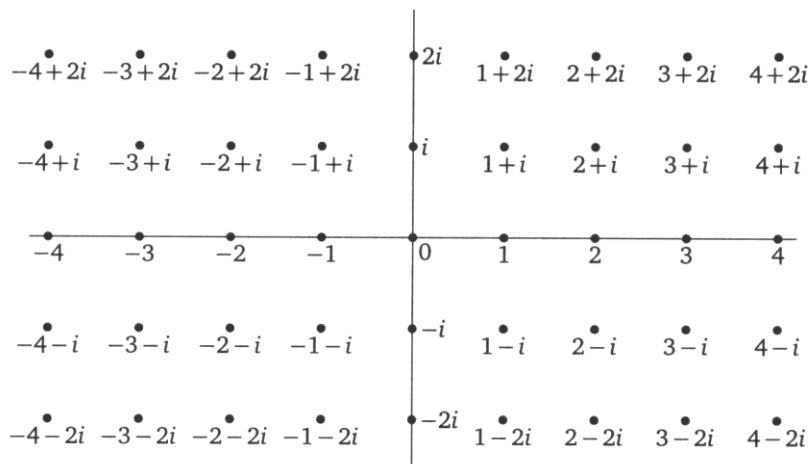
$$a + bw = \left(a - \frac{1}{2}b\right) + b\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (\text{переход к обычному представлению})$$

$$a + bi = \left(a + \frac{1}{\sqrt{3}}b\right) + b\frac{2}{\sqrt{3}}w \quad (\text{переход к базису Эйзенштейна})$$

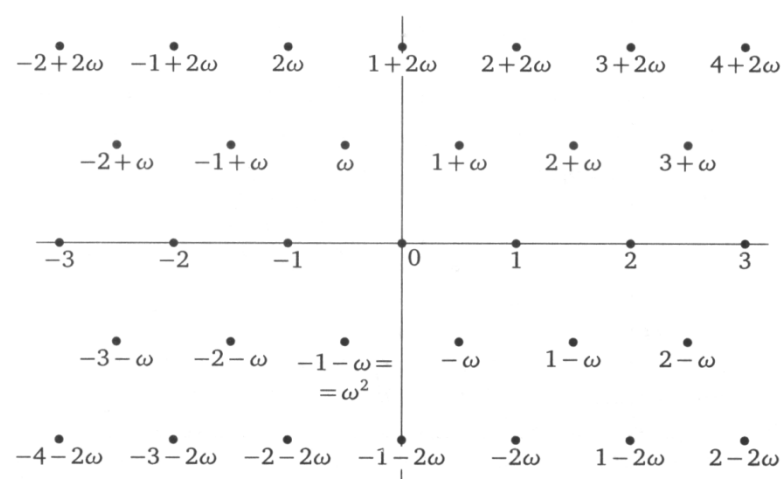
$$w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1 - w \quad w, w^2, w^3 - \text{кубические корни из 1.}$$

$$w^3 = 1$$

Геометрическое представление



Стандартный базис, на рисунке показаны Гауссовы целые числа. Умножение на $\{1, i, -1, -i\}$ переводит их в себя.



Базис Эйзенштейна, на рисунке – Эйзенштейновы целые числа. Умножение на $\{\omega, \omega^2, \omega^3\}$ переводит их в себя

Арифметические действия в базисе Эйзенштейна

$$(a + bw) + (c + dw) = (a + c) + (b + d)w,$$

$$\begin{aligned}(a + bw)(c + dw) &= ac + (ad + bc)w + bdw^2 = \\ &= ac + (ad + bc)w - bd(1 + w) = (ac - bd) + (ad + bc - bd)w,\end{aligned}$$

$$(a + bw)w = (a - b) - bw,$$

$$(a + bw)w^2 = (a + bw)w^{-1} = (-a + b) - aw$$

Ради этого все и затевалось – чтобы умножение на кубические корни из 1 сводилось к одному сложению!

Быстрое умножение комплексных чисел

Стандартный подход:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad 4 \text{ умножения, } 2 \text{ сложения}$$

Сокращение числа умножений:

$$\alpha = a(c + d)$$

$$\beta = d(a + b)$$

$$\gamma = c(b - a)$$

3 умножения, 5 сложений

$$(a + bi)(c + di) = (\alpha - \beta) + (\alpha + \gamma)i$$

По базису Эйзенштейна:

$$(a + bw)(c + dw) = (ac - bd) + (ad + bc - bd)w \quad 4 \text{ умножения, } 3 \text{ сложения}$$

Сокращение числа умножений:

$$\alpha = b(c - d)$$

$$\beta = c(a - b)$$

$$\gamma = ad$$

3 умножения, 4 сложения

$$(a + bw)(c + wd)$$

$$= (\alpha + \beta) + (\alpha + \gamma)w$$

Оценка вычислительных затрат

$$\left. \begin{aligned} X(n) &= F_0(n) + F_1(n)W_N^n + F_{-1}(n)W_N^{-n}, \\ X(n + N/3) &= F_0(n) + F_1(n)W_N^n W_3^1 + F_{-1}(n)W_N^{-n} W_3^{-1}, \\ X(n - N/3) &= F_0(n) + F_1(n)W_N^{-n} W_3^{-1} + F_{-1}(n)W_N^n W_3^1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} N/3 \text{ таких троек, } \log_3 N \text{ итераций} \end{array}$$

2 комплексных умножения на фазовые множители (6 действ. умножений)

Получаем $2N \log_3 N \approx 1.26 N \log_2 N$ умножений

Для БПФ по базису 2 требуется $2N \log_2 N$. Т.е по числу умножений данный алгоритм существенно эффективнее!

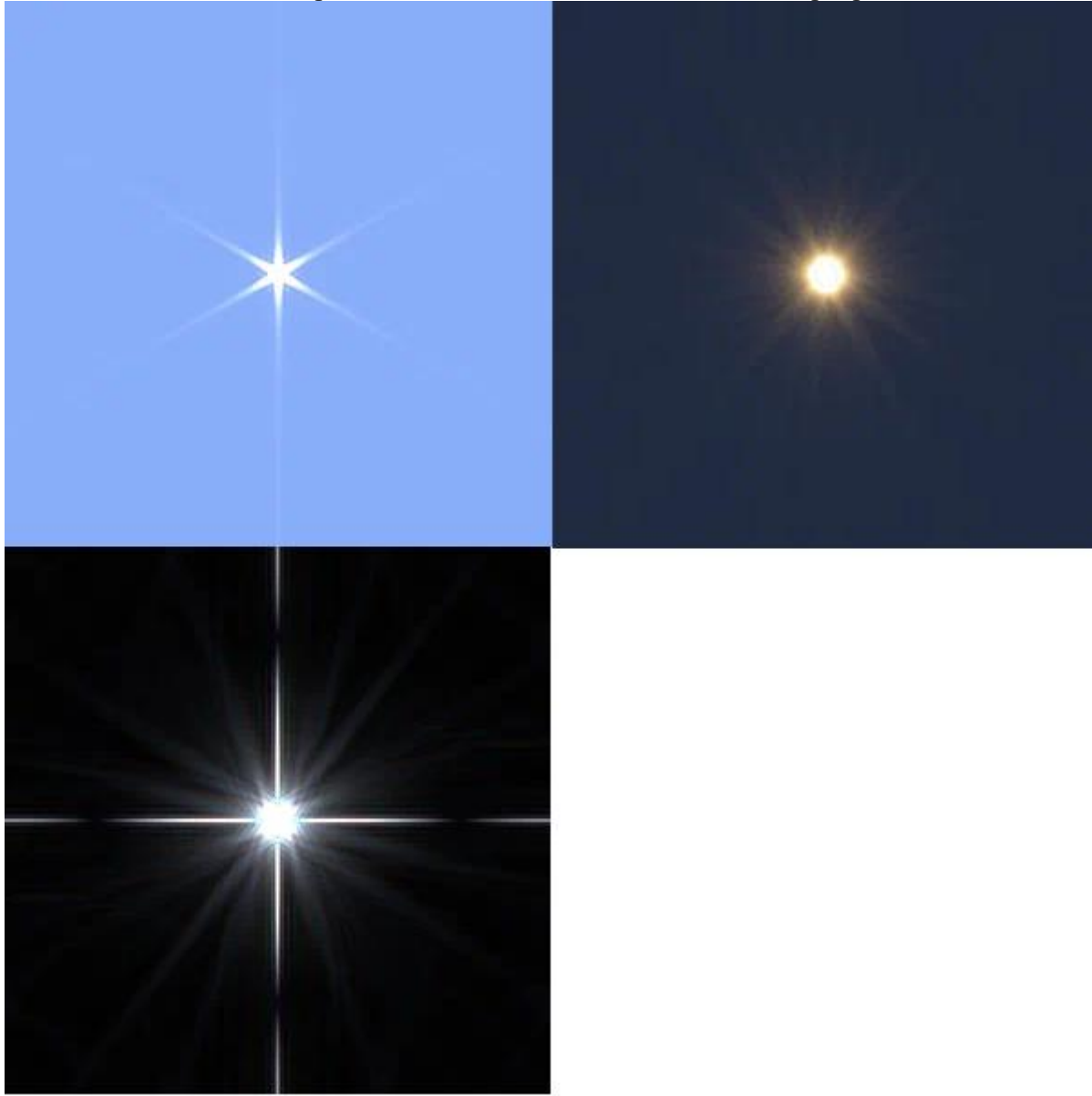
Сопоставим с БПФ с расщеплённым базисом. Впрочем, в настоящее время умножения стали сопоставимы со сложениями, и зачастую самое важное в реализации этих алгоритмов – наиболее «предсказуемо» обращаться к памяти, чтобы избежать постоянных cache miss...

Уравновешенная троичная инверсия

```
n ← 0
для j=1..T-2:
    k ← N/3
    m ← T
    n ← n + k
    пока n > m:
        n ← n - 3k
        m ← m - 2k
        k ← k/3
        n ← n + k
    если j < n то:
        x[j] ↔ x[n]
        x[-j] ↔ x[-n]
    иначе, если n < 0, то:
        x[j] ↔ x[n]
```

Время выполнения $O(N)$. Разработан и более сложный метод, работающий примерно вдвое быстрее.

Пример применения: моделирование дифракции



Выводы

- Уравновешенное троичное БПФ благодаря своему свойству сохранять симметрии входного сигнала хорошо подходит для решения многих задач,
- Используя базис Эйзенштейна и способ быстрого перемножения комплексных чисел, можно довести количество действительных умножений до $1.26N\log_2 N$, что существенно меньше, чем у двоичного БПФ,
- Написана программа, реализующая прямой и обратный 1D- и 2D- вариант данного алгоритма. Она показала работоспособность и достаточно высокую производительность. С помощью данного алгоритма оказалось удобно моделировать дифракцию лучей сложного спектра на входной апертуре оптической системы.